

קורס תורת הקבוצות – סתיו תשס"ה

תוספת א': אחד פונקציות

משפט. תהיינה F_1 ו- F_2 פונקציות. $F_1 \cup F_2$ היא פונקציה אם הפונקציות F_1 ו- F_2 מתיישבות.

הוכחה. נניח כי F_1 ו- F_2 מתיישבות; עלינו להוכיח כי לכל x, y, z אם $x(F_1 \cup F_2)y$ ו- $x(F_1 \cup F_2)z$ אז $y = z$. מכיון ש- $x(F_1 \cup F_2)y$ קיים xF_1y או xF_2y , כלומר קיים $i \in \{1, 2\}$ כך ש- xF_iy . באותו אופן, מכיון ש- $x(F_1 \cup F_2)z$ קיים $j \in \{1, 2\}$ כך ש- xF_jz . אם $i = j$ אז xF_iy ו- xF_iz , ומכיון ש- F_i פונקציה לכן $y = z$. אם $i \neq j$ אז $x \in \text{Dom } F_i \cap \text{Dom } F_j$, ומכיון שלפי הנחתנו, הפונקציות F_i ו- F_j מתיישבות לכן $y = F_i(x) = F_j(x) = z$.

כעת נניח כי F_1 ו- F_2 אינן מתיישבות ונוכיח כי היחס $F_1 \cup F_2$ אינו פונקציה. לפי הגדרת המתיישבות הפונקציות קיים $x \in \text{Dom } F_1 \cap \text{Dom } F_2$ כך ש- $F_1(x) \neq F_2(x)$. קיים $xF_1F_1(x)$ וגם $xF_2F_2(x)$ ולכן קיים $x(F_1 \cup F_2)F_1(x)$ וגם $x(F_1 \cup F_2)F_2(x)$ למרות ש- $F_1(x) \neq F_2(x)$, וזה אומר שהיחס $F_1 \cup F_2$ אינו פונקציה.